Краткие сообщения ОИЯИ №4-84 JINR Rapid Communications №4-84
УДК 517.397

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В КОНТИНУАЛЬНОМ ИНТЕГРАЛЕ ПО УСЛОВНОЙ МЕРЕ ВИНЕРА

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов, О.В.Сидорова

Рассмотрено линейное преобразование, взаимно однозначно отображающее пространство функций $C = \{x(t) \in C[0,1]\,;\ x(0) = x(1) = 0\}$ само на себя. С помощью замены переменных, задаваемой этим преобразованием, интеграл по условной мере Винера $\int\limits_C P[x]F[x]d_{W^*}x$ с весом $P[x] = \exp\{\int\limits_0^1 [\lambda p(t)\,x^2(t) + g(t)x(t)]\,dt\}$ / λ - вещественный параметр, $p(t)$, $g(t) \in C[0,1]$/ выражен через интеграл без веса от $F[\phi(x)+a]$, где ϕ и $a(t)$ зависят от $p(t)$,$g(t)$, λ. На основании этого результата построено семейство приближенных формул с весом для вычисления континуальных интегралов по условной мере Винера. Формулы точны для функциональных многочленов степени $\le 2m+1 (m = 1,2,...)$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

On Some Linear Substitution of Variables at the Conditional Weiner Integral

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu., Sidorova O.V.

The linear transformation that performs one to one correspondence of the functional space $C = \{x(t) \subset C[0,1]\,;\ x(0) = x(1) = 0\}$ by itself is treated. By substitution of the variables set by this transformation the conditional Wiener integral $\int\limits_C P[x]\,F[x]\,d_{W^*}x$ with the weight $P[x] = \exp\{\int\limits_0^1 [\lambda p(t)\,x^2(t) + g(t)\,x(t)]\,dt\}$ (λ is a real parameter; $p(t)$, $g(t) \in C[0,1]$) is reduced to the integral of $F[\phi(x)+a]$, without weight (ϕ and $a(t)$ depend on $p(t)$, $g(t)$, λ). Based on this result the family of the formulas with a weight for the approximate evaluation of a conditional Wiener integral is derived; the formulas are exact when $F[x]$ is a functional polynomial of degree at most $2m+1\,(m = 1,2,...)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Условная мера Винера [1] является частным случаем гауссовых мер /см., напр., [2] / и представляет собой вероятностную меру в пространстве функций $x(t) \in C = \{C[0,1];\ x(0) = x(1) = 0\}$. Интеграл от функционала $F[x]$, заданного на C, по условной мере Винера обозначается следующим образом:

$$\int_C F[x]\, d_{W^*}x\,.$$

Первые работы по приближенному вычислению интегралов по гауссовой мере связаны с именем Р.Х.Камерона [3]. Им было положено начало целому направлению в развитии методов приближенного вычисления континуальных интегралов, заключающемуся в построении приближенных формул, точных на классе функциональных многочленов заданной степени. Составные [2] приближенные формулы такого типа произвольного порядка точности построены в [4]. Обзор существуюших методов приближенного вычисления континуальных интегралов и некоторые вопросы теории содержатся в [2] и [5].

Интегрирование по гауссовой мере широко используется в современной квантовой физике [6]. В частности, в квантовой механике решение уравнения Шредингера выражается в евклидовой метрике через интеграл по условной мере Винера с помощью формулы Фейнмана-Каца /см. [7], а также [6] /. Построение квантовой механики на основе аппарата континуального интегрирования изложено в [8]. В ряде случаев целесообразно использовать приближенные формулы с весом, поскольку функционалы могут содержать множитель, который удобно выделить в качестве весового функционала. Тем самым будет расширен класс функционалов, на котором формула точна.

В данной работе мы рассматриваем линейную замену переменных в интеграле по условной мере Винера, позволяющую получить приближенные формулы с весом.

Рассмотрим линейное преобразование $x(t) \to y(t)$:

$$y(t) = x(t) + (1-t)\int_0^t K(s)x(s)\,ds - \int_0^t L(s)\,ds\,, \qquad /1/$$

где

$$K(s), L(s) \in C[0,1]\,; \qquad \int_0^1 L(s)\,ds = 0\,. \qquad /2/$$

Преобразование /1/ взаимно однозначно отображает пространство C само на себя. Обратное преобразование имеет вид:

$$x(t) = y(t) - (1-t)\cdot \exp\left\{-\int_0^t (1-s)K(s)\,ds\right\}\cdot \int_0^t \exp\left\{\int_0^s (1-v)K(v)\,dv\right\}\times$$

$$\times [y(s) + \int_0^s L(v)dv] K(s)ds + \int_0^t L(s)ds. \qquad /3/$$

Воспользуемся заменой переменных /3/ для интеграла

$$I = \int_C P[x] F[x] d_{W^*}x \qquad /4/$$

с весом

$$P[x] = \exp\{ \int_0^1 [\lambda p(t)x^2(t) + g(t)x(t)] dt \}, \qquad /5/$$

где λ - вещественный параметр, $p(t), g(t) \in C[0,1]$. После соответствующих преобразований получаем следующий результат:

Теорема. Интеграл /4/ с весом /5/ может быть записан в виде:

$$I = \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)K(s)ds\} \cdot \exp\{\frac{1}{2}\int_0^1 L^2(t)dt\} \cdot \int_C F[\phi(x)+a] d_{W^*}x, \qquad /6/$$

где

$$\phi(x(t)) = x(t) - \frac{1-t}{v(t)} \cdot \int_0^t K(s)v(s)x(s)ds, \quad v(t) = \exp\{\int_0^t (1-s)K(s)ds\},$$

$K(s)$ - решение дифференциального уравнения

$$(1-s)K'(s) - (1-s)^2K^2(s) - 3K(s) - 2\lambda p(s) = 0; \; s \in [0,1],$$

$$K(1) = \frac{2\lambda}{3};$$

$$a(t) = \int_0^t L(s)ds - \frac{1-t}{v(t)} \cdot \int_0^t K(s)v(s)[\int_0^s L(v)dv] ds;$$

$$L(t) = \int_0^t [K(s)v(s)B(s) - g(s)] ds + C, \quad B(t) = \int_t^1 g(s) \frac{1-s}{v(s)} ds;$$

константа C выбирается из условия /2/.

Данная теорема, в частности, позволяет точно вычислить континуальный интеграл

$$\int_C \exp\{ \int_0^1 [\lambda x^2(t) + gx(t)] dt \} d_{W^*}x =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2\lambda}}{\sqrt{\sin\sqrt{2\lambda}}} \cdot \exp\{ \frac{g^2}{2\lambda\sqrt{2\lambda}} [\mathrm{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}] \}; \quad (\lambda < \frac{\pi^2}{2}).$$

Этот результат получается путем подстановки в /6/ $F[x] \equiv 1$, $p(t) \equiv 1$, $g(t) \equiv g = \mathrm{const}$.

Найденное преобразование /1/ служит основой для построения приближенных формул с весом /5/. С помощью приведенной выше теоремы может быть получено семейство формул, зависящих от натурального параметра m. Действительно, воспользовавшись для вычисления континуального интеграла в правой части /6/ приближенной формулой [9], точной для функциональных многочленов степени $\leq 2m+1 (m = 1,2,\dots)$, получаем

$$I \approx \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)K(s)ds\} \cdot \exp\{\frac{1}{2}\int_0^1 L^2(t)dt\} \times$$

$$\times \frac{1}{2^m} \underbrace{\int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1}}_{m} F[\theta_m(\vec{u},\cdot) + a(\cdot)]\, du_1 \dots du_m ; \qquad /7/$$

где

$$\theta_m(\vec{u},t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \theta(u_k, t) ; \qquad \theta(w,t) = f(w,t) - \rho(w,t) ;$$

$[c_k^{(m)}]^2$ - корни многочлена $Q_m(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{z^{n-k}}{k!}$;

$$\rho(w,t) = \begin{cases} \operatorname{sign} w, & t \leq |w| \\ 0, & t > |w| \end{cases}$$

$$f(w,t) = \frac{(1-t)\operatorname{sign} w}{v(t)} [1 + \int_0^{\min\{|w|,t\}} K(s)v(s)ds] .$$

В случае $p(t) \equiv 1$, $g(t) \equiv g = \mathrm{const}$, $\lambda < \frac{\pi^2}{2}$ формула /7/ приобретает вид:

$$\int_C \exp\{\int_0^1 [\lambda x^2(t) + gx(t)]\, dt\} F[x]\, d_{W^*}x \approx$$

$$\approx \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sin\sqrt{2\lambda}}} \cdot \exp\{\frac{g^2}{2\lambda\sqrt{2\lambda}} [\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}]\} \times$$

$$\times \underbrace{\int_{-1}^{1} \dots \int_{-1}^{1}}_{m} F[\theta_m(\vec{u},\cdot) + a(\cdot)]\, du_1 \dots du_m ,$$

где

$$a(t) = \int_0^t L(s)ds -$$

$$-\sin\sqrt{2\lambda}(1-t) \int_0^t \frac{\sqrt{2\lambda}(1-s)\cdot\cos\sqrt{2\lambda}(1-s) - \sin\sqrt{2\lambda}(1-s)}{(1-s)\cdot\sin^2\sqrt{2\lambda}(1-s)} [\int_0^s L(v)dv]\, ds. \qquad /8/$$

Приближенные формулы /7/, /8/ точны для функциональных многочленов степени $\leq 2m+1$.

Литература

1. Wiener N. Journ.Math. and Phys., 1923, 2, p.131; Proc. London Math.Soc., 1924, vol.22, No.6, p.454.
2. Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. "Наука и техника", Минск, 1976.
3. Cameron R.H. Duke Math.Journ., 1951, vol.18, No.1, p.111.
4. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. ОИЯИ, Р11-83-867, Дубна, 1983.
5. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. "Наука", М., 1983.
6. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. "Мир", М., 1984.
7. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. "Мир", М., 1965.
8. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. "Мир", М., 1968.
9. Fosdick L.D., Jordan H.F. Journ.Cpmput.Phys., 1968, vol.3, No.1, p.1.

Рукопись поступила 3 декабря 1984 года.